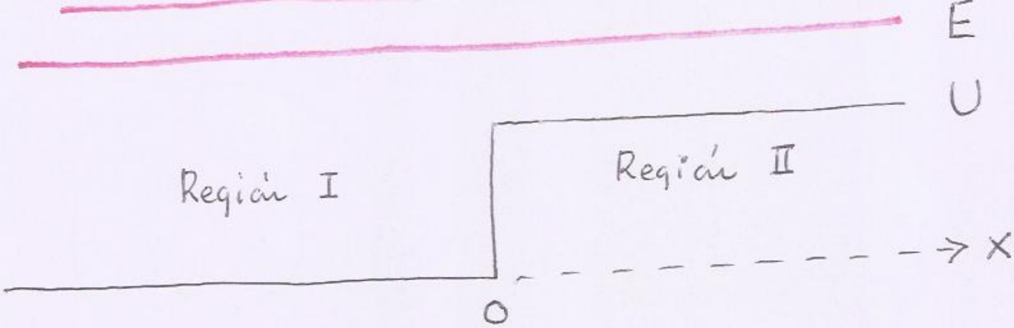
# Potencial escalón ($E > U$)




$$\Psi_{I}(x,t) = \Phi_{I}(x)\, e^{-iEt/\hbar} \qquad (1)$$

$$\Psi_{II}(x,t) = \Phi_{II}(x)\, e^{-iEt/\hbar} \qquad (2)$$

Como $E > U$ en ambas regiones, las autofunciones $\Phi_{I}(x)$ y $\Phi_{II}(x)$ son oscilatorias y se escriben como :

$$\Phi_{I}(x) = A\, e^{ik_{I}x} + B\, e^{-ik_{I}x} \;; \quad k_{I} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \qquad (3)$$

$$\Phi_{II}(x) = C\, e^{ik_{II}x} + D\, e^{-ik_{II}x} \;; \quad k_{II} = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar} \qquad (4)$$

Ya que no hay onda reflejada en la region II (para $x > 0$) porque no hay ninguna discontinuidad en $U$ (para $x > 0$), entonces

$$D = 0 \qquad (5).$$

Condiciones de borde en $x = 0$ =>

$$\Phi_I(x)\Big|_{x=0} = \Phi_{II}(x)\Big|_{x=0} \quad (6)$$

$$\frac{d\Phi_I(x)}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{d\Phi_{II}(x)}{dx}\Big|_{x=0} \quad (7)$$

$$A + B = C \quad (8)$$

$$i k_I A - i k_I B = i k_{II} C \quad (9)$$

(8) y (9) =>

$$\begin{aligned} k_I A + k_I B &= k_I C \\ k_I A - k_I B &= k_{II} C \\ \hline \Rightarrow \quad 2 k_I A &= (k_I + k_{II}) C \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{C}{A} = \frac{2 k_I}{k_I + k_{II}} \quad (10)$$

(8) y (9) =>

$$\begin{aligned} -k_{II} A - k_{II} B &= -k_{II} C \\ k_I A - k_I B &= k_{II} C \\ \hline \Rightarrow \quad (k_I - k_{II}) A - (k_I + k_{II}) B &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{B}{A} = \frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}} \quad (11)$$

La función de onda de la región I tiene una parte que es la onda que incide sobre la discontinuidad de $U$ en $x = 0$

$$\psi_{inc} = A\, e^{i k_I x}\, e^{-i E t/\hbar} \quad (12)$$

y una onda que se refleja

$$\psi_{ref} = B\, e^{-i k_I x}\, e^{-i E t/\hbar} \quad (13)$$

La función de onda de la región II tiene solamente una onda trasmitida

$$\psi_{tras} = C\, e^{i k_{II} x} \qquad (14)$$

Previamente se mostró que los flujos de probabilidad $\vec{J}$ asociados a cada una de estas ondas especificadas en (12), (13) y (14), en virtud de la ecuación $\vec{J} = \frac{\hbar}{m} \, \mathrm{Im}\{\psi^* \nabla \psi\}$ (15), pueden ser determinados

dando :

$$\vec{J}_{inc} = \frac{\hbar k_I}{m} |\psi_{inc}|^2 \, \hat{i} \qquad (16),$$

$$\vec{J}_{ref} = -\frac{\hbar k_I}{m} |\psi_{ref}|^2 \, \hat{i} \qquad (17),$$

$$\vec{J}_{tras} = \frac{\hbar k_{II}}{m} |\psi_{tras}|^2 \, \hat{i} \qquad (18).$$

También se tiene que

$$R = \frac{|\vec{J}_{ref}|}{|\vec{J}_{inc}|} \qquad (19) \quad \text{y}$$

$$T = \frac{|\vec{J}_{tras}|}{|\vec{J}_{inc}|} \qquad (20)$$

Sustituyendo (16) y (17) en (19) ; y (16) y (18) en (20) :

$$R = \frac{\frac{\hbar k_I}{m} |\psi_{ref}|^2}{\frac{\hbar k_I}{m} |\psi_{inc}|^2} = \frac{|\psi_{ref}|^2}{|\psi_{inc}|^2} \qquad (21)$$

$$T = \frac{\frac{\hbar k_{II}}{m} |\psi_{tras}|^2}{\frac{\hbar k_I}{m} |\psi_{inc}|^2} = \frac{k_{II}}{k_I} \frac{|\psi_{tras}|^2}{|\psi_{inc}|^2} \qquad (22)$$

(12), (13) y (14) $\Rightarrow$

$$|\psi_{inc}|^2 = |A|^2 \qquad (23)$$

$$|\psi_{ref}|^2 = |B|^2 \qquad (24)$$

$$|\psi_{tras}|^2 = |C|^2 \qquad (25)$$

(21), (22), (23), (24) y (25) $\Rightarrow$

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} \qquad (26)$$

$$T = \frac{k_{II}}{k_I} \frac{|C|^2}{|A|^2} \qquad (27)$$

(11) y (26) $\Rightarrow$ $$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left|\frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}}\right|^2 = \left(\frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}}\right)^2 \qquad (28)$$

(10) y (27) $\Rightarrow$ $$T = \frac{k_{II}}{k_I}\left|\frac{C}{A}\right|^2 = \frac{k_{II}}{k_I}\left|\frac{2k_I}{k_I + k_{II}}\right|^2 = \frac{4k_I k_{II}}{(k_I + k_{II})^2} \qquad (29)$$

$R + T = ?$

$$R + T = \left(\frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}}\right)^2 + \frac{4k_I k_{II}}{(k_I + k_{II})^2} = \frac{k_I^2 + k_{II}^2 - 2k_I k_{II} + 4k_I k_{II}}{(k_I + k_{II})^2} = 1 \qquad (30)$$

## Comentarios sobre los resultados obtenidos

$$R = \left( \frac{k_I - k_{II}}{k_I + k_{II}} \right)^2 \qquad (31)$$

Como $k_I = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ y $k_{II} = \dfrac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar}$ (32)

y $(k_I - k_{II}) < (k_I + k_{II}) \Rightarrow R < 1$ siendo $E > U$ (33).

Este resultado es diferente al obtenido cuando $E < U$ que fué $R = 1$.

Lo que realmente sorprende de $R$ en este caso es que $R > 0$, es decir, a pesar de que la energie de la partícula $E$ es mayor que la energía potencial ("es mayor que el escalón de potencial"), aún así, existe la probabilidad de que la partícula sea reflejada en la discontinuidad de $U$, lo cual, clásicamente, sería imposible.

El otro comentario importante es que $R + T = 1$ (ecuación (30)) lo que quiere decir que la partícula incidente solamente tiene dos posibilidades: reflejarse o trasmitirse al pasar por la discontinuidad que existe en $U = 0$ en $x = 0$.

- De las ecuaciones obtenidas para R y T, esto es:

$$R = \frac{(k_I - k_{II})^2}{(k_I + k_{II})^2} \quad y \quad T = \frac{4 k_I k_{II}}{(k_I + k_{II})^2} \qquad (34),$$

se observa que si se intercambian $k_I$ y $k_{II}$, R y T conservan su valor.

- Esto significa que si la partícula incidiera sobre la discontinuidad de V (en $x=0$) moviéndose de derecha a izquierda (en lugar de moverse de izquierda a derecha, como se supuso previamente), los valores de R y T serían los mismos.

- La función de onda que describe el movimiento de la partícula y, por lo tanto, el flujo de probabilidad es parcialmente reflejado ($0 < R < 1$) porque existe un discontinuidad en $V(x)$ (en $x=0$) y no porque V se haga más grande en la dirección en la que incide la partícula. Basta con que haya una discontinuidad en V (ya sea que V aumente o disminuya) para que se produzca la reflexión.

- El comportamiento de R y T mencionado en esta página (al intercambiar $k_I$ y $k_{II}$) es una propiedad que caracteriza a <u>todas</u> las ondas. (En óptica se denomina propiedad de reciprocidad).

• Cuando la luz pasa perpendicularmente a través de una interfase entre medios con índices de refracción distintos, una fracción de la luz es reflejada debido al cambio brusco de longitud de onda y la misma fracción es reflejada independientemente de si la luz incide por un lado de la interfase o por el otro.

(Ver Libro de Campos y Ondas Electromagnéticas de Lorrain - Corson, Capítulo de Propagación de ondas electromagnéticas (II), Reflexión y refracción en la separación entre dos medios no conductores no magnéticos, Ecuaciones de Fresnel)

• Sucede lo mismo cuando una partícula microscópica experimenta un cambio brusco de su longitud de onda de De Broglie. ( $\lambda_I = \frac{2\pi}{k_I}$ ; $\lambda_{II} = \frac{2\pi}{k_{II}}$ ). Esto es una prueba más de la naturaleza ondulatoria de las partículas. La partícula microscópica es "guiada" por su onda.